

Lemme. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$.

Alors $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$.

L'application Ψ définie par $\Psi(t) = \ln(I_n + tA) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k A^k$ est bien définie pour $t \in]-\frac{1}{\rho(A)}, \frac{1}{\rho(A)}[$

car $\rho(tA) = |t| \rho(A) < 1$ et 1 est le rayon de convergence de la série entière $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$.

Si $\rho(A) = 0$, alors A est nilpotente et Ψ est de classe C^∞ sur $I = \mathbb{R}$.

Si $0 < \rho(A) < 1$, alors Ψ est de classe C^∞ sur $I =]-\frac{1}{\rho(A)}, \frac{1}{\rho(A)}[$ et :

$$\forall t \in I, \Psi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} t^{k-1} A^k = A \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k A^k = A(I_n + tA)^{-1}$$

D'où $\Psi'(t) \in \mathcal{C}(A)$ et commute avec $\Psi(t) \in \mathcal{C}(A)$.

Ainsi, $\Psi(t) = \exp(\Psi'(t))$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \Psi'(t) = \Psi'(t) \exp(\Psi(t)) = A(I_n + tA)^{-1} \exp(\Psi(t))$$

D'où, $\Psi'(t)$ est dérivable et $(I_n + tA)\Psi'(t) = A \exp(\Psi(t))$, $\forall t \in I$.

En dérivant : $\forall t \in I, A\Psi'(t) + (I_n + tA)\Psi''(t) = A\Psi'(t) \exp(\Psi(t)) = A\Psi'(t)$.

D'où $(I_n + tA)\Psi''(t) = 0$ et $\Psi''(t) = 0$, $\forall t \in I$ car $I_n + tA$ est inversible.

Ainsi, Ψ' est constante égale à $\Psi'(0) = A$ et $\Psi(t) = tA + \underbrace{\Psi(0)}_{=I_n}$, $\forall t \in I$. D'où, $\exp(\ln(I_n + tA)) = I_n + tA$, $\forall t \in I$.

Or, $1 \in I$ donc en $t=1$, on a $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$.

Proposition: $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Puisque $\rho(A) = \rho(D)$, $D \in GL_n(\mathbb{C})$ et $A = D(I_n + D^{-1}N)$.

Écrivons $D = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$. Soit $P \in \mathcal{C}(X)$ tel que $P(\lambda_k) = \lambda_k$ où $\lambda_k = \lambda_k$.

$$\text{Alors, } D = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1} = Q \operatorname{diag}(\underbrace{P(\lambda_1)}_{=\lambda_1}, \dots, \underbrace{P(\lambda_n)}_{=\lambda_n}) Q^{-1} = \exp(P(Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^{-1})) = \exp(P(D))$$

Or, $D \in \mathcal{C}(A)$ donc $\exp(P(D)) = \exp(P_1(A))$ où $P_1 \in \mathcal{C}(X)$.

Puisque N est nilpotente et que N et D commutent, $D^{-1}N$ est nilpotente i.e. $\rho(D^{-1}N) = 0$.

D'après le lemme, $I_n + D^{-1}N = \exp(\ln(I_n + D^{-1}N))$ et $\ln(I_n + D^{-1}N) \in \mathcal{C}(D^{-1}N) \subset \mathcal{C}(A)$.

Ainsi, $I_n + D^{-1}N = \exp(P_2(A))$ où $P_2 \in \mathcal{C}(X)$.

D est inversible donc $D^{-1} \in \mathcal{C}(D) \subset \mathcal{C}(A)$

$\Rightarrow A = \exp(P_1(A)) \exp(P_2(A)) = \exp((P_1 + P_2)(A))$. En particulier, $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Corollaire: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors, il existe $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = \exp(X)$ et $B = \exp(Y)$.

Posons $\Psi: [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$
 $t \mapsto \exp((1-t)X + tY)$. Alors Ψ est continue par continuité de $\exp$ et $\Psi(0) = \exp(X) = A$ et

$\Psi(1) = \exp(Y) = B$.